

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)
סמסטר הסתיו – תשנ"ז – מועד ג'

הזמן: שעתיים

המורה: פרופ' שהרן שלח

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 4 השאלות הבאות.
תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות.

1. תהי L שפה המכילה לכל i טבעי סימן יחס חד מקומי P_i .
תהי T תורה בשפה L כך ש-
(א) $T \vdash \neg(\exists x)(P_i(x) \wedge P_j(x))$, כאשר $i < j$ טבעיים.
(ב) $T \vdash (\exists x)P_i(x)$ לכל i .

נניח כי T חסרת סתירה. תהי Γ קבוצת הפסוקים $\{ \neg P_i(x) : i \text{ טבעי} \}$. היש מודל M של T והשמה למודל המספקים את Γ ?

2. תהי L שפה, ו- M מודל בו ניתן ליחס השוויון פרוש לא תיקני E , אך כל אקסיומות השוויון של השפה L מתקיימות בו. הוכח כי ישנו מודל N עם שוויון תיקני כך שלכל פסוק ϕ קיים

$$M \models \phi \Leftrightarrow N \models \phi$$

3. הוכח כי קבוצת הקשרים $\{ \neg, \equiv \}$ אינה שלמה.

4. קבוצת פסוקים Σ תיקרא בלתי תלויה אם לכל $\phi \in \Sigma$ קיים $\phi \in \Sigma \setminus \{ \phi \}$.

(א) תהי Σ קבוצת פסוקים סופית. האם יש ל- Σ תת-קבוצה Σ' (כלומר $\Sigma' \subseteq \Sigma$) כך ש- Σ' בלתי תלויה ושקולה ל- Σ ?

(ב) הוכח שיש קבוצת פסוקים אינסופית Σ שאין לה תת-קבוצה בלתי תלויה?

בהצלחה!